수학 연구에 쓰이는 공리들은 얼마나 당연한가?

@ 한국 논리학의 날 2026

백진언 (고등과학원)

2026년 1월 14일

시작하기 전에

- 저는 논리학을 잘 모르고, 분야에 대해 틀린/오해할 수 있는 말을 할 수 있습니다.
  - 자유롭게 정정 부탁드립니다
- 한 수학자의 개인적 관심 및 탐구로 봐주시면 감사하겠습니다.
  - 이미 있는 담론들과 개인적인 사건들을 섞어 얘기하려 합니다.
- 해결보다는 문제 제기/생각해 볼 지점 제시로 봐주시면 감사하겠습니다.

수학적 증명이란?

- 궁극적 진리 추구
- 엄밀한 논증
- 논리적 완벽함

> 하지만... 정말 궁극적 진리일까?

증명의 구조

증명은 두 가지로 구성:

1. 공리 (Axioms) (e.g. ZFC, 타입이론의 constructor/destructor)
2. 논리적 유도 (Logical derivation) (e.g. Modus Ponens, Natural Deduction)

> 각각을 의심해보자

수학적 증명을 의심해 낯설게 보기

의심의 의의:

- 배제: "증명이 거짓이다" (✕)
- 깊은 이해: "어떤 맥락에서 참인가?" (✓)

탐구 방향:

- 증명이 참인 맥락은?
- 증명이 거짓으로 볼 수 있는 맥락은?

1. 배중률

Law of Excluded Middle: $P \lor \neg P$

- "A이거나 not A이다"
- 고전 논리(Classical Logic)의 기본 원리

> **정리:** a^b가 유리수인 무리수 a, b가 있다.

증명: $b = \sqrt{2}$ 라 두자.

- Case 1: $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$가 무리수면 → $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$이고 $a^{\sqrt{2}} = 2$ (유리수)
- Case 2: $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$가 유리수면 → $a = \sqrt{2}$이고 $a^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ (가정에 의해 유리수)

질문: 그래서 a의 값이 정확히 무엇인가?

배중률의 계산적 의미

증명과 계산의 대응 (Curry-Howard Isomorphism):

- 배중률의 사용은 대략 `if A then X else Y` 에 대응된다

프로그래밍에서:

```
if is_prime(37):
    return "prime"
else:
    return "composite"
```

A의 진리값이 **미리 계산**되어 있음

"배중률의 악마"

```
if not is_rational(sqrt(2) ** sqrt(2)): # ????
    return (sqrt(2) ** sqrt(2), sqrt(2))
else:
    return (sqrt(2), sqrt(2))
```

수학적 증명에서:

- A의 진리값이 **없는데** 분기
- "악마"가 A라고 가정하고 X를 리턴 (이 컴퓨터 상태 자체를 저장)
- 나중에 누가 A를 반증함
- 악마는 **과거로 돌아가** (저장된 컴퓨터 상태를 복구) 다시 Y를 리턴

> 시간의 비가역성이 없는 논리

이런 맥락에서 계산 가능성이 중요한 맥락(타입이론의 많은 경우)에서는 배중률을 공리에서 고려하지 않는다.

2. 연역 논증 낯설게 보기

n단 논법 (Modus Ponens chain):

가정: $A_1, A_1 \Rightarrow A_2, A_2 \Rightarrow A_3, ... A_{n-1} \Rightarrow A_n$

결론: A_n

수학적 증명에서는

- 연쇄가 무한정 뻗어나갈 수 있음
- 각 단계가 항상 보존됨

나비효과의 역설

논리적 연쇄:
나비 날갯짓 → 바람 → 더 큰 바람 → 태풍

각 단계가 논리적으로 타당하다면:

- 나비 날갯짓 → 바람 (참)
- 바람 → 더 큰 바람 (참)
- 더 큰 바람 → 태풍 (참)
- **따라서:** 나비 날갯짓 → 태풍 (참?)

> 정말 나비가 태풍을 만드나?

수학 vs 현실의 함의

수학의 가정:

- **모든 시점**에서 $A \to B$는 항상 참 또는 항상 거짓
- 시간에 무관하게 보존됨
- 예: $2 + 2 = 4$는 영원히 참

일상의 함의:

- A는 나에게 잘해줄 **수도** 있고 아닐 **수도** 있다
- 상황과 맥락에 따라 변함
- 항상 참도, 항상 거짓도 아님

엔지니어링에서의 함의

각 implication이 *얼마나* 참인지가 중요:

항공기 제어 소프트웨어:

1. 이 CPU 명령들이 값 X를 계산? (99.99% 신뢰도)
2. 값 X를 모터에 입력 → 실제 X 속도? (98% 정확도)
3. 센서로 오차범위 확인 (±5% 허용)

> 100%의 논리가 아님!

도덕적 판단의 예시

수학적 추론:

- 거짓말은 나쁘다
- 나쁜 것은 하지 말아야 한다
- **따라서:** 거짓말을 하지 말아야 한다

현실:

- 살인자가 친구 위치를 물어볼 때?
- 맥락에 따라 "거짓말은 나쁘다"의 참값이 달라짐

3. 수학적 귀납법 낯설게 보기

Mathematical Induction:

$P(0)$ 참, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ 참

$\Rightarrow$ 모든 n에 대해 $P(n)$ 참

일상적 비유:

- A는 내 작은 부탁을 항상 들어준다
- A에게 부탁을 하나 더 해도 들어준다
- **그렇다면** A에게 10^{10}개 부탁해도 들어줄까?

Edward Nelson의 의심

Predicative Arithmetic (Nelson, 1986)

Finitist 입장:

- 자연수가 "한꺼번에" 존재한다는 것을 거부
- 무한 전체 (infinite totality) 불인정
- 자연수를 **집합으로 보지 않음**

> 수학적 귀납법은 모든 자연수가 동시에 존재한다고 가정한다

4. 큰 자연수의 존재

관측 가능한 한계:

- 우주 전체 원자 수: 약 10^{80}개

숫자의 기원:

- 개수 세기에서 시작 (사과 3개, 별 100개)

정말 존재하는가?

질문들:

- 10^{100}은 정말 존재하는가?
- $10^{10^{10}}$은?
- $10^{10^{10^{10}}}$은?
- $10^{10^{10^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ (100번 반복)은?

Ultrafinitism

입장:

- 물리적 제약으로 구성 불가능한 수학 객체
- 실제로 쓸 수 없으면 존재하지 않는 것?

논점:

- 어디까지가 "존재하는" 자연수인가?
- 10^{80}? 10^{100}? 10^{1000}?

5. 선택 공리 낯설게 보기

Axiom of Choice (AC):

집합들의 모음이 주어졌을 때, 각 집합에서 원소를 하나씩 선택하여 새로운 집합을 만들 수 있다.

직관적으로:

- 유한개 집합: 당연함
- 무한개 집합: 정말?
  - Jerry Bona: "The *Axiom of Choice* is obviously true, the *well-ordering principle* obviously false, and who can tell about *Zorn's lemma*?"
  - 셋은 수학적으로 동치(ZF 하에)이나 얼마나 참인지의 *느낌* 은 사람마다 다르다.

선택공리의 좋은 결과들

AC로 증명 가능:

- 모든 벡터 공간은 기저를 가진다
- 무한 곱집합의 성질
- Tychonoff 정리
- 모든 전사함수는 right inverse를 가진다

AC 없이는 (AC 없는 ZF) 필요한 상황(e.g. 특정한 벡터 공간)에 명시적으로 잡는게 웬만하면 가능하지만, 매번 명시적으로 잡아줘야 한다.

AC는 수학 하기를 *편하게* 해준다.

선택공리의 이상한 결과들

AC로 증명 가능:

- Banach-Tarski Paradox
  - 구를 유한 조각으로 나눠 재배열
  - 원래 크기의 2배로 만들 수 있다
- Non-measurable sets 존재

AC는 *직관에 반하는* 사례들을 만들어 준다.

Reverse Mathematics

질문:

- 어떤 정리가 어떤 공리를 필요로 하나?
- 공리 체계의 최소 강도는?

탐구:

- 선택공리 없이 증명 가능한 정리는?
- 선택공리가 정말 필요한 정리는?
- 더 약한 형태의 선택공리로 충분한가?

결론

증명이 쓰는 가정들의 맥락을 보자:

- 절대적 진리 vs 조건부 진리
- 어떤 공리계에서 참인가?
- 어떤 논리계에서 참인가?
- *어떤 상황에서 참인가?*
- 증명이 의미하는 바는 무엇인가?

감사합니다