Standard completeness of substructural fuzzy logics: Cases of *wua*-uninorm logics

김연홍(Yeonhong Kim), 전북대학교 철학과 석사과정

2025. 1. 14

1. t-norm based fuzzy logics
   - Warmup: Basic fuzzy logic
   - standard completeness of Monoidal t-norm logic
2. substructural fuzzy logics
3. weak-u-associative (basic) uninorm logics

Part I:

t-norm based fuzzy logics

사전지식 점검: 퍼지 논리

예비 정의

퍼지 논리(fuzzy logic)는 명제의 진리치가 0과 1 사이의 실수 값으로 정의되는 논리 체계 계통이다.

대부분의 퍼지 논리는 강한 연언(strong conjunction)이라 불리는, 두 진리치를 병합하는 연결사를 갖는다

$$v(\varphi \circ_{\text{Ł}} \psi) = \max\{0, v(\varphi) + v(\psi) - 1\}$$

$$v(\varphi \circ_{\mathbf{G}} \psi) = \min\{v(\varphi), v(\psi)\}$$

$$v(\varphi \circ_{\mathbf{\Pi}} \psi) = v(\varphi) \cdot v(\psi)$$

t-노름

정의 t-노름(t-norm, triangular norm)

t-노름은 특정 원소 다음 조건을 모두 만족하는 연산 $\circ : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$이다. 모든 $a, b, c \in [0,1]$에 대해,

(a) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$, (결합성)

(b) $a \circ b = b \circ a$, (가환성)

(c) $1 \circ a = a$, (항등원)

(d) $a \leq b \Rightarrow a \circ c \leq b \circ c$. (단조성)

Ł, **G**, **Π**는 모두 t-노름이고, 특히 연속 t-노름이다

기본 퍼지 논리

정의 기본 퍼지 논리(Basic logic, **BL**)

BL은 연속 t-노름을 특성화하는 퍼지 논리 체계다.

t-노름의 연속성은 다음 공리(나눗셈가능성, divisibility)에 의해 보장된다

$$(\varphi \circ (\varphi \to \psi)) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \tag{DIV}$$

모노이드 t-노름 논리

정의 모노이드 t-노름 논리(Monoidal t-norm logic, **MTL**)

MTL은 좌연속(left-continuous) t-노름을 특성화하는 퍼지 논리 체계다.

t-노름의 좌연속성을 특성화하는 공리는은 DIV를 약화하여 얻는다

$$(\varphi \circ (\varphi \to \psi)) \to (\varphi \wedge \psi) \qquad \text{(DIV')}$$

Q. “진리치가 0과 1 사이에서 정의된다”를 어떻게 보장할 것인가

$\Rightarrow$ $[0,1]$을 도메인으로 하는, 상응하는 (t-노름) 구조들에 대해 완전성을 보인다. 즉, **표준 완전성**(standard completeness)을 보인다

표준 완전성 증명: 기본 전략

퍼지 논리 체계 $\mathscr{L}$에 대해,

1. $\mathscr{L}$-대수($\mathscr{L}$-algebra)를 정의하고, $\mathscr{L}$-대수에 대한 완전성을 보인다
2. $\mathscr{L}$-대수를 표준 $\mathscr{L}$-대수로 매장(embed)한다

$$\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} \varphi \quad \underset{\text{step ①}}{\Leftrightarrow} \quad \Gamma \vDash_{\mathscr{L}} \varphi \quad \underset{\text{step ②}}{\Leftrightarrow} \quad \Gamma \vDash_{\mathscr{L}_{[0,1]}} \varphi$$

단계 1: $\mathscr{L}$-대수에 대한 완전성

정의 선형 확장성(linear extension property, LEP)

$\mathscr{L}$-모형에서의 의미론적으로 귀결이 **선형순서** $\mathscr{L}$-모형에서의 의미론적 귀결과 논리적으로 동등하면, $\mathscr{L}$ 의 의미론이 선형 확장성을 띤다고 부른다.

즉, LEP는 다음이 성립함을 의미한다.

$$\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \Gamma \models^{\ell} \varphi.$$

단계 1: $\mathscr{L}$-대수에 대한 완전성

LEP를 특성화하는 공리 계통을 준선형성(prelinearity, PL) 공리라고 부른다

예시

$$(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$$

귀결식 계산(sequent calculus)에서는, 준선형성(semilinear property, SLP)이 추론규칙으로 허용됨을 의미한다

$$\frac{\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \chi \qquad \Gamma, \psi \to \varphi \vdash \chi}{\Gamma \vdash \chi} \quad \text{(SLP)}$$

단계 1: $\mathscr{L}$-대수에 대한 완전성

PL 공리의 채택, LEP, SLP는 모두 논리적으로 동등하다

LEP가 성립하는 논리를 준선형 논리(semilinear logic)라고 부른다

퍼지 논리는 준선형 논리이므로, $\mathscr{L}$-모형에 대한 완전성을 보이면, 자동으로 선형 $\mathscr{L}$-모형도 사용할 수 있게 된다. 즉,

$$\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \Gamma \models^{\ell} \varphi.$$

단계 2: 표준 $\mathscr{L}$-대수로의 매장, 예네이–몬타냐 구성

$$\text{가산 } \mathscr{L}\text{-대수} \Rightarrow \text{가산 조밀 } \mathscr{L}\text{-대수} \Rightarrow \text{표준 } \mathscr{L}\text{-대수}$$

로의 순차적인 매장

단계 2: 표준 $\mathscr{L}$-대수로의 매장, 예네이–몬타냐 구성

정리

가산 선형 $\mathbf{MTL}$ 대수 $(D, \circ, \sqsubseteq)$에 대해, 가산 집합 $(D', *, \precsim)$이 존재하여,

(a) $(D', \precsim)$는 조밀 선형순서집합이고, 최대값 M과 최소값이 있다.

(b) $(D', *, M)$은 가환 모노이드.

(c) $*$는 $(X, \precsim)$ 상의 순서위상에 대해 좌연속.

(d) D의 잔여 쌍(residuated pair) $(\circ, \rightarrow)$에 대해, 매장 $j : D \rightarrow D'$이 존재하여, $\mathrm{ran}(j)$ 상에서 $(*, \rightarrow_{D'})$를 잔여 쌍으로 만든다. 즉, $j(a \rightarrow b) = j(a) \rightarrow_{D'} j(b)$.

단계 2: 표준 $\mathscr{L}$-대수로의 매장, 예네이–몬타냐 구성

$$D' := \{\langle n, m\rangle : n \in D - \{0\} \ \& \ m \in (0,1] \cap \mathbb{Q}\} \cup \{\langle 0, 1\rangle\}.$$

$\precsim$:= ($\sqsubseteq$, $\leq_{\mathbb{Q}}$)에 대한 사전식 순서

$$\langle a, b\rangle * \langle c, d\rangle := \begin{cases} \min\{\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\} & \text{if } a \circ c = \min\{a, c\}, \\ \langle a \circ c, 1\rangle & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$j(n) := \langle n, 1\rangle.$$

참고: **MTL**에서 $(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \big(((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \to \varphi)\big)$.

단계 2: 표준 $\mathscr{L}$-대수로의 매장, 예네이–몬타냐 구성

정리

가산 조밀 선형 **MTL** 대수를 표준 **MTL** 대수로 매장할 수 있다.

주어진 가산 조밀 선형 **MTL** 대수 D'는 $[0,1] \cap \mathbb{Q}$와 순서동형이다.

해당 순서동형사상을 $j : D' \to [0,1] \cap \mathbb{Q}$라 하자.

$$a *' b := j(j^{-1}(a) * j^{-1}(b)).$$

그러면, $[0,1] \cap \mathbb{Q}$도 이전까지 증명했던 **MTL** 대수의 성질을 모두 보존한다.

단계 2: 표준 $\mathscr{L}$-대수로의 매장, 예네이–몬타냐 구성

이제 $([0,1]\cap\mathbb{Q}, *', \leq_{\mathbb{Q}})$를 $([0,1], \hat{*}, \leq_{\mathbb{R}})$에 대응시킨다.

$[0,1]\cap\mathbb{Q} = H$ 라고 부르자. 그러면,

$$\begin{aligned} a \,\hat{*}\, b &:= \sup\{x *' y : x, y \in [0,1]\cap\mathbb{Q}, x \leq a, y \leq b\} \\ &= \sup_{\substack{x\in H \\ x\leq a}} \sup_{\substack{y\in H \\ y\leq b}} (x *' y). \end{aligned}$$

이렇게 정의하면, $([0,1], \hat{*}, \leq_{\mathbb{R}})$이 우리가 찾던 **MTL** 대수다.

MTL의 표준 완전성

정리

MTL은 표준 완전하다.

$$\begin{aligned} \Gamma \nvdash \varphi &\Rightarrow \Gamma \nvDash \varphi \\ &\Rightarrow \Gamma \nvDash_{\ell} \varphi \\ &\Rightarrow \Gamma \nvDash_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} \varphi \\ &\Rightarrow \Gamma \nvDash_{[0,1]} \varphi. \end{aligned}$$

Part II:

Substructural fuzzy logics

MTL의 표준 완전성

t-노름의 정의에서, 강한 연언의 항등원은 1(최대값)이었다

⇒ 강한 연언의 항등원이 $e(\neq 1$일 수 있음)인 경우로 일반화할 경우, 준구조 논리의 일종이 됨

⇒ **MTL**에서 약화(Weakening, W)를 제거

$$(\varphi \rightarrow \mathbf{t}) \wedge (\mathbf{f} \rightarrow \varphi) \tag{W}$$

유니노름 논리

정의 유니노름 논리(uninorm logic, **UL**)

유니노름 논리는 준선형성 공리를 채택하는 곱셈-덧셈-직관주의 선형 논리 (multiplicative-additive-intuitionistic linear logic, **MAILL**)다.

UL에서는 통상적인 준구조 논리와 동일하게, 네 개의 논리 상수 $\bot, \top, \mathbf{f}, \mathbf{t}$를 갖는다

유니노름 논리의 표준 완전성 증명 전략

메트캐프–몬타냐에 따르면, 유니노름 논리에 대해 예네이–몬타냐 식 구성을 곧바로 사용할 수 없다

반면, 다음 규칙을 추가한 귀결식 계산 $\mathbf{UL^D}$ 의 표준 완전성을 보이는 것은 더 쉽다

$$\frac{\Gamma \vdash (\varphi \to p) \vee (p \to \psi) \vee \chi}{\Gamma \vdash (\varphi \to \psi) \vee \chi} \quad \text{(density)}$$

(단, p는 $\Gamma, \varphi, \psi, \chi$에 나타나지 않는다.)

유니노름 논리의 표준 완전성 증명 전략

따라서, 다음 단계를 수행한다

1. $\mathbf{UL}^{\mathbf{D}}$의 표준 완전성을, 예네이–몬타냐와 비슷한 구성으로 보인다
2. $\mathbf{UL}$과 $\mathbf{UL}^{\mathbf{D}}$에 상응하는 초귀결식 계산(hypersequent calculus) $\mathbf{GUL}$과 $\mathbf{GUL}^{\mathbf{D}}$을 정의한다
3. $\mathbf{GUL}^{\mathbf{D}}$에 대해, density rule이 제거될 수 있음을 보인다

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{UL} \arrow[d, leftrightarrow] & & \mathbf{UL}^{\mathbf{D}} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & {[0,1]} \\
\mathbf{GUL} \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{density elimination}"'] & & \mathbf{GUL}^{\mathbf{D}} &
\end{tikzcd}$$

유니노름 논리의 표준 완전성 증명 전략

메트캐프–몬타냐 전략의 한계: 어렵다

⇒ Yang-style 구성의 도입
예네이–몬타냐 구성을 준구조 논리로 일반화

⇒ 강한 연언이 결합적이지 않은 준구조 퍼지 논리(**MICAL**, **MIAL**)에 대한 표준 완전성 증명 가능

Part III:

Weak-u-associative (basic) uninorm logics

$$(\mathbf{UWABULs} = \{\mathbf{WA}_U\mathbf{BUL}, \mathbf{A}_U\mathbf{BUL}, \mathbf{SA}_U\mathbf{BUL}\})$$

UWABUL의 이해

정의 약-u-결합 유니놈 논리(weak-u-associative uninorm logics, **UWABULs**)

UWABULs는 $[0, u]$ 구간에서 연속이고, 상수 u가 제약적으로 단위로 기능하는(restricted u-unital) 미카노름을 특성화하는 세 가지 논리 체계다.

참고: 미카노름은 결합 법칙이 성립하지 않는 유니노름

UWABUL의 주요 공리

$$(U \to \varphi) \vee (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi \circ (\varphi \to \psi)) \qquad (\mathrm{RDIV}^{w}_{U})$$

$$\varphi_U \circ U \to \varphi_U \qquad (U\text{-RUN})$$

$$\varphi_U \circ (\psi_U \circ \chi_U) \leftrightarrow (\varphi_U \circ \psi_U) \circ \chi_U \qquad (\mathrm{wAS}_U)$$

참고: $\varphi_U := (\varphi \wedge U)$.

UWABUL의 세 논리 체계는 각각 대수적 의미론에 대해 완전하다

양 식 구성

예네이–몬타냐 식 구성의 핵심 요소들

$$D' := \{\langle n, m\rangle : n \in D - \{0\} \;\&\; m \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}\} \cup \{\langle 0, 1\rangle\}.$$

$$\langle a, b\rangle * \langle c, d\rangle := \begin{cases} \min\{\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\} & \text{if } a \circ c = \min\{a, c\}, \\ \langle a \circ c, 1\rangle & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$j(n) := \langle n, 1\rangle .$$

양 식 구성

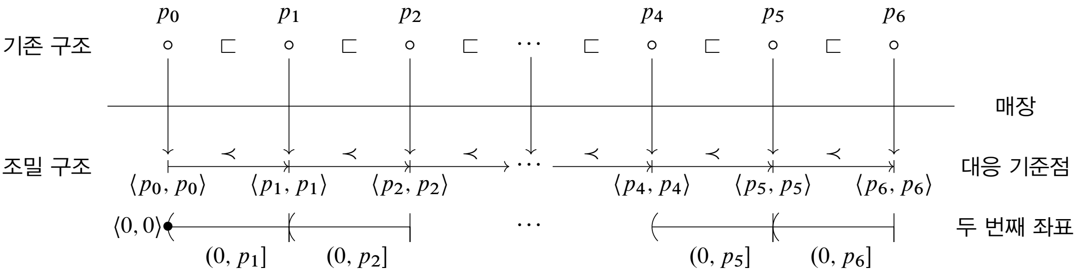
양 식 구성으로의 전환

$$H := \{\langle a, b\rangle : a \in D - \{0\}, b \in (0, a] \cap \mathbb{Q}\} \cup \{\langle 0, 0\rangle\}$$

$$\langle a, b\rangle * \langle c, d\rangle \begin{cases} \max\{\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\} & \text{if } a \circ c = a \vee c, a \neq c \text{ and} \\ & (\langle a, b\rangle \precsim \langle e, e\rangle \text{ or } \langle c, d\rangle \precsim \langle e, e\rangle); \\ \min\{\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\} & \text{if } a \circ c = a \wedge c \text{ and} \\ & (\langle a, b\rangle \precsim \langle e, e\rangle \text{ or } \langle c, d\rangle \precsim \langle e, e\rangle); \\ \langle a \circ c, a \circ c\rangle & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$j(n) = \langle n, n\rangle .$$

양식 구성



$$(\text{단}, \ p_0 = \bot = 0, \ p_6 = \top = 1.)$$

감사합니다