



고전적 귀류법에 대한 어떤 환원 절차가 수용가능한가?

Which Reduction Procedures for Classical Reductio are Acceptable?

서울시립대학교 철학과

최승락

목차

1. 증명론의 주요 결과물과 환원 절차의 문제

1.1. 정형화 정리, 하위식 원리 증명 및 일관성 증명

Normalization theorem, subformula principle, and consistency

1.2. 프라위츠의 증명과 스톨마르크-안도의 증명

Prawitz's proof and Stålmarck-Andou's proof

1.3. 고전적 귀류법에 관한 환원 절차로 올바른 (혹은 더 나은) 것은 무엇인가?

2. 고전 자연연역 체계에서의 하위식 원리 및 일관성 증명

스톨마르크-안도의 환원 방식을 채택할 경우, 모든 논리연산자를 가지는 1차 고전 자연연역 체계에서 정형화정리, 하위식 속성 및 일관성 증명이 모두 증명된다.

3. 스톨마르크-안도의 환원 절차를 표준 방식으로 채택해야 하는 이유

프라위츠의 환원절차 도입 목적을 살피더라도, (1) 극대식 제거와 (2) 하위식 속성과 일관성 증명을 위해 환원 절차를 도입했었고 이러한 견지에서, 프라위츠의 환원 방식 보다 스톨마르크-안도 방식이 더 적합하다.

1. 증명론의 주요 결과물과 환원 절차의 문제

1.1. 정형화 정리, 하위식 속성 증명 및 일관성 증명

게르하르트 겐첸
(Gerhard Gentzen)
1909. 11. 24. ~1945. 8. 4.

Gentzen, Gerhard(1935), "Untersuchungen über das logische Schließen. I. *Math Z* 39, 176–210.
– Translated as "Investigations into Logical Deduction", in (Gentzen & Szabo 1969).

Gentzen, Gerhard (1936), "Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie", Mathematische Annalen, 112: 493–565.
– Translated as "The consistency of arithmetic", in (Gentzen & Szabo 1969).

Gentzen, Gerhard (1938), "Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie", Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der Exakten Wissenschaften, 4: 19–44.
– Translated as "New version of the consistency proof for elementary number theory", in (Gentzen & Szabo 1969).

Gentzen, Gerhard (1969), Szabo, M. E. (ed.), *Collected Papers of Gerhard Gentzen*, Studies in logic and the foundations of mathematics (Hardcover ed.), Amsterdam: North-Holland, ISBN 978-0-7204-2254-2.
– an English translation of papers.

게르하르트 겐첸(Gerhard Gentzen)은 1936년 및 1938년 논문 등에서 페아노 산수 PA에 초한귀납을 사용하여 PA의 일관성을 증명한다. 이 증명을 제시하기 전인 1935년(Gentzen, 1935, Sec II)에는 수학에서 사용하는 추론의 자연스러운 방식이라는 의미에서 자연연역(natural deduction)을 고안한다.

1. 증명론의 주요 결과물과 환원 절차의 문제

1.1. 정형화 정리, 하위식 속성 증명 및 일관성 증명

게르하르트 겐첸
(Gerhard Gentzen)
1909. 11. 24. ~ 1945. 8. 4.

겐첸의 가장 중요한 두 업적은 Hauptsatz와 산수의 일관성 증명이라고 할 수 있는데, Hauptsatz는 절단식 제거 정리(cut-elimination theorem) 혹은 정형화 정리(normalization theorem)으로도 불린다. 이는, 모든 도출(derivation, 증명)이 불필요한 우회(unnecessary detuor)가 없는 정형 도출(normal derivation)로 전환이 가능하다는 것이다.

거칠게 말해, 정형 도출은 그 도출에 사용된 규칙이 무엇인지가 명시적으로 분명하나 나타나는 도출을 말한다. 만약 산수 체계의 모든 증명(도출)이 정형 도출로만 이루어져 있다면 산수에서의 모든 증명에서 사용하는 규칙이 명시적으로 드러날 수 있다. 이때, 겐첸은 산수 체계에서 사용하는 규칙들 중 모순을 이끌어내는 규칙이 없음이 보임으로써 일관성을 증명한다.

그런데, 겐첸은 고전 자연연역 체계에서 Hauptsatz를 보이는 것이 적합하지 않다고 생각했고 이에 정식열 연산(sequent caculus)를 고안해서 Hauptsatz와 산수의 일관성을 보이기에 이른다.

1. 증명론의 주요 결과물과 환원 절차의 문제

1.1. 정형화 정리, 하위식 속성 증명 및 일관성 증명

다그 프라비츠
(Dag Prawitz)

겐첸과 달리 프라비츠(1965, 1971)는 고전논리 자연연역 체계를 사용해 정형화 정리와 하위식 원리 및 일관성 증명을 제시한다. 다만, 그가 사용한 고전 자연연역 체계는 선언과 존재양화에 관한 규칙을 사용하지 않고 선언 문장은 연언과 부정으로 존재양화 문장은 보편양화 문장과 부정으로 번역하여 사용하는 약한 고전논리 체계였다.

$$\exists x\varphi x \coloneqq \neg\forall x\neg\varphi x$$

$$\varphi \vee \psi \coloneqq \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

이 경우, 존재양화 연산자와 선언 연결사는 주요 연산자 (principal operator) 혹은 논리상항이 아니게 된다.

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\mathfrak{D}_1 & \mathfrak{D}_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2\end{array}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\wedge I \qquad \dfrac{\varphi_1 \wedge \varphi_2}{\varphi_i}\wedge E_{(i=1,2)} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi] \\ \mathfrak{D}_1 \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\to I_{,1} \qquad \dfrac{\begin{array}{cc} & \mathfrak{D}_2 \\ \varphi \to \psi & \varphi\end{array}}{\psi}\to E$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}_1 \\ \varphi[y/x]\end{array}}{\forall x\varphi(x)}\forall I \qquad \dfrac{\forall x\varphi(x)}{\varphi[t/x]}\forall E \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^1 \\ \mathfrak{D} \\ \bot\end{array}}{\varphi}CR_{,1}$$

1. 증명론의 주요 결과물과 환원 절차의 문제

1.1. 정형화 정리, 하위식 속성 증명 및 일관성 증명

다그 프라비츠
(Dag Prawitz)

프라비츠의 정형화 정리.

S_{WC}를 선언과 존재양화에 관한 규칙을 지니지 않은 약한 고전 1차 논리의 자연연역 체계라고 하자. 그러면 S_{WC} 의 모든 닫힌 도출 D에 대해, D는 정형 형식으로 환원된다.

정의. 임의의 도출이 정형 형식이라는 것은 그 도출이 극대식(maximum formula)을 지니지 않을 뿐만 아니라 (환원 절차 집합에) 적용가능한 어떠한 환원 절차도 없다는 것이다.

참고. 발표 자료에는 극대식 및 극대분할(maximum segment)이 없는 경우로 정의하고 있습니다. 거칠게 말해, 극대분할은 순열 전환 (permutation conversion)을 적용하지 않은 선언, 존재양화 혹은 고전적 귀류법에 관한 규칙을 포함한 도출이 있는 경우를 말합니다.

정의. 주전제(major premise)란 제거규칙이 제거하는 논리 연산자를 포함하는 식을 말한다. 극대식(maximum formula)이란 도입 규칙이나 고전적 귀류법(classical reductio, CR) 규칙의 결론이면서 제거 규칙의 주전제인 경우를 말한다.

1. 증명론의 주요 결과물과 환원 절차의 문제

1.1. 정형화 정리, 하위식 속성 증명 및 일관성 증명

다그 프라비츠
(Dag Prawitz)

정의. 임의의 도출이 **정형 형식**이라는 것은 그 도출이 극대식(maximum formula)을 지니지 않을 뿐만 아니라 (환원 절차 집합에) 적용가능한 어떠한 환원 절차도 없다는 것이다.

정의. **주전제**(major premise)란 제거규칙이 제거하는 논리 연산자를 포함하는 식을 말한다.
극대식(maximum formula)이란 도입 규칙이나 고전적 귀류법(classical reductio, CR) 규칙의 결론이면서 제거 규칙의 주전제인 경우를 말한다.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^1\\ \mathfrak{D}_1\\ \psi\end{matrix}}{\varphi\to\psi}\to I_{,1} \qquad \begin{matrix}\mathfrak{D}_2\\ \varphi\end{matrix}}{\psi}\to E \qquad \rhd_{\to} \qquad \begin{matrix}\mathfrak{D}_2\\ \varphi\\ \mathfrak{D}_1\\ \psi\end{matrix}$$

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg(\varphi\to\psi)]^1\\ \mathfrak{D}\\ \bot\end{matrix}}{\varphi\to\psi}CR_{,1} \qquad \rhd_{CR(\to)} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\dfrac{[\neg\psi]^3 \qquad \dfrac{[\varphi\to\psi]^1 \quad [\varphi]^2}{\psi}\to E}{\bot}\to E}{\neg(\varphi\to\psi)}\to I_{,1}\\ \mathfrak{D}\\ \bot\end{matrix}}{\psi}CR_{,3}}{\varphi\to\psi}\to I_{,2}$$

1. 증명론의 주요 결과물과 환원 절차의 문제

1.1. 정형화 정리, 하위식 속성 증명 및 일관성 증명

다그 프라비츠
(Dag Prawitz)

프라비츠의 정형화 정리.

S_{WC}를 선언과 존재양화에 관한 규칙을 지니지 않은 약한 고전 1차 논리의 자연연역 체계라고 하자. 그러면 S_{WC} 의 모든 닫힌 도출 D에 대해, D는 정형 형식으로 환원된다.

프라비츠의 일관성 정리.

S_{WC}에는 $\perp$(모순)에 관한 닫힌 정형 도출이 존재하지 않는다.

프라비츠의 제한된 하위식 원리 증명.

S_{WC}를 D를 S_{WC}에서의 임의의 정형 도출이라고 하자. 그리고 φ를 D에서 사용되는 임의의 식이라고 하자. 그러면 만약 φ가 CR-규칙의 해제되는 가정이고 $\neg\psi$ 형식을 지닌다면 ψ는 D의 마지막 식의 하위식이거나 열린 가정의 하위식이다. 그 외의 경우, φ는 D의 마지막 식의 하위식이거나 열린 가정의 하위식이다.

하위식(subformula)은 다음과 같이 귀납적으로 정의된다.

(1) φ는 φ의 하위식이다,
(2) $\neg\psi$가 φ의 하위식이면 ψ와 $\perp$도 φ의 하위식이다,
(3) $\psi \circ \sigma$가 φ의 하위식이면 ψ와 σ도 φ의 하위식이다, 여기서 $\circ$는 $\wedge$, $\vee$ 또는 $\rightarrow$이다,
(4) $\circ\psi$가 φ의 하위식이면 $\psi[x/t]$도 φ의 하위식이다. 여기서 $\circ$는 $\forall$ 또는 $\exists$, (5) 그 이외에 다른 어떤 경우도 φ의 하위식이 아니다.

1. 증명론의 주요 결과물과 환원 절차의 문제

1.2. 프라위츠의 증명과 스톨마르크-안도의 증명

군나 스톨마르크
(Gunnar Stålmarck)

군나 스톨마르크(1991)와 안도 유키(1995)는 논리연산자를 모두 가지고 있는 고전 자연연역 체계에서 정형화 정리를 증명한다.

S_{FC} := 연언, 선언, 조건문, 부정, 보편양화, 존재양화에 관한 규칙 및 ECQ와 CR을 모두 가진 고전 자연연역 체계

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathfrak{D}_1 & \mathfrak{D}_2\\ \varphi_1 & \varphi_2\end{matrix}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\wedge I \qquad \dfrac{\varphi_1 \wedge \varphi_2}{\varphi_i}\wedge E_{(i=1,2)} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathfrak{D}_1\\ \varphi_i\end{matrix}}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\vee I_{(i=1,2)} \qquad \dfrac{\begin{matrix} & [\varphi_1]^1 & [\varphi_2]^2\\ & \mathfrak{D}_2 & \mathfrak{D}_3\\ \varphi_1 \vee \varphi_2 & \psi & \psi\end{matrix}}{\psi}\vee E_{,1,2}$$

$$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^1\\ \mathfrak{D}_1\\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}\to I_{,1} \qquad \dfrac{\begin{matrix} & \mathfrak{D}_2\\ \varphi \to \psi & \varphi\end{matrix}}{\psi}\to E \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^1\\ \mathfrak{D}_1\\ \bot\end{matrix}}{\neg\varphi}\neg I_{,1} \qquad \dfrac{\begin{matrix} & \mathfrak{D}_2\\ \neg\varphi & \varphi\end{matrix}}{\bot}\neg E \qquad \dfrac{\bot}{\varphi}ECQ$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathfrak{D}_1\\ \varphi[y/x]\end{matrix}}{\forall x\varphi(x)}\forall I \qquad \dfrac{\forall x\varphi(x)}{\varphi[t/x]}\forall E \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathfrak{D}_1\\ \varphi(t)\end{matrix}}{\exists x\varphi[x/t]}\exists I \qquad \dfrac{\begin{matrix} & [\varphi[y/x]]^1\\ & \mathfrak{D}_2\\ \exists x\varphi(x) & \psi\end{matrix}}{\psi}\exists E_{,1} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\neg\varphi]^1\\ \mathfrak{D}\\ \bot\end{matrix}}{\varphi}CR_{,1}$$

1. 증명론의 주요 결과물과 환원 절차의 문제

1.2. 프라위츠의 증명과 스톨마르크-안도의 증명

스톨마르크와 안도는 프라위츠와 다른 형식의 고전적 귀류법(classical reductio)에 관한 환원 절차를 사용했다. 프라위츠의 고전적 귀류법에 관한 환원 방식은 선언 문장과 존재양화 문장이 극대식(maximum formula)일 경우 정형 형식(normal form)으로 환원할 수 없었지만 스톨마르크-안도의 환원 절차는 이것이 가능했다.

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg(\varphi\vee\psi)]^1\\ \mathfrak{D}\\ \bot\end{matrix}}{\varphi\vee\psi}\,CR_{,1}\qquad \not\rhd_{CRP(\vee)}\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\dfrac{[\varphi\vee\psi]^5\quad \dfrac{[\neg\varphi]^1\quad[\varphi]^2}{\bot}\neg E\quad \dfrac{[\neg\psi]^4\quad[\psi]^3}{\bot}\neg E}{\bot}\vee E_{,2,3}}{\neg(\varphi\vee\psi)}\neg I_{,5}\\ \mathfrak{D}\\ \bot\end{matrix}}{\varphi}CR_{,1}}{\varphi\vee\psi}\vee I$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\neg(\varphi_1\vee\varphi_2)]^1\\ \mathfrak{D}_1\\ \bot\end{matrix}}{\varphi_1\vee\varphi_2}\bot_{C,1}\quad \begin{matrix}[\varphi_1]^1\\ \mathfrak{D}_2\\ \psi\end{matrix}\quad \begin{matrix}[\varphi_2]^2\\ \mathfrak{D}_3\\ \psi\end{matrix}}{\psi}\vee E_{,1,2}\qquad \rhd_{\vee}\qquad \dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\dfrac{[\neg\psi]^4\quad \dfrac{[\varphi_1\vee\varphi_2]^1\quad \begin{matrix}[\varphi_1]^2\\ \mathfrak{D}_2\\ \psi\end{matrix}\quad \begin{matrix}[\varphi_2]^3\\ \mathfrak{D}_3\\ \psi\end{matrix}}{\psi}\vee E_{,2,3}}{\bot}\to E}{\neg(\varphi_1\vee\varphi_2)}\to I_{,1}\\ \mathfrak{D}_1\\ \bot\end{matrix}}{\psi}CR_{,4}$$

1. 증명론의 주요 결과물과 환원 절차의 문제

1.2. 프라위츠의 증명과 스톨마르크-안도의 증명

스톨마르크와 안도는 프라위츠와 다른 형식의 고전적 귀류법(classical reductio)에 관한 환원 절차를 사용했다. 프라위츠의 고전적 귀류법에 관한 환원 방식은 선언 문장과 존재양화 문장이 극대식(maximum formula)일 경우 정형 형식(normal form)으로 환원할 수 없었지만 스톨마르크-안도의 환원 절차는 이것이 가능했다.

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg(\varphi\vee\psi)]^1\\ \mathfrak{D}\\ \bot\end{array}}{\varphi\vee\psi}\,CR_{,1} \quad \triangleright_{CRP(\vee)} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}\\ \dfrac{\dfrac{[\varphi\vee\psi]^5 \quad \dfrac{[\neg\varphi]^1 \quad [\varphi]^2}{\bot}\,\neg E \quad \dfrac{[\neg\psi]^4 \quad [\psi]^3}{\bot}\,\neg E}{\bot}\,\vee E_{,2,3}}{\neg(\varphi\vee\psi)}\,\neg I_{,5}\\ \bot\end{array}}{\varphi}\,CR_{,1}}{\varphi\vee\psi}\,\vee I$$

스톨마르크-안도 환원의 일반 형식

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^1\\ \mathfrak{D}_1\\ \bot\end{array}}{\varphi}\,CR_{,1} \quad \begin{array}{c}\mathfrak{D}_2\\ \psi\end{array}}{\sigma}\,\circ E \quad \triangleright_{CRSA} \quad \text{CR}\,\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{[\neg\sigma]^2 \quad \dfrac{[\varphi]^1 \quad \begin{array}{c}\mathfrak{D}_2\\ \psi\end{array}}{\sigma}\,\circ}{\bot}\,\neg E}{\neg\varphi}\,\neg I_{,1}\\ \mathfrak{D}_1\\ \bot\end{array}}{\sigma}\,CR_{,2}$$

1. 증명론의 주요 결과물과 환원 절차의 문제

1.2. 프라위츠의 증명과 스톨마르크-안도의 증명

군나 스톨마르크
(Gunnar Stålmarck)

군나 스톨마르크(1991)와 안도 유키(1995)는 논리연산자를 모두 가지고 있는 고전 자연연역 체계에서 정형화 정리를 증명한다.

스톨마르크-안도 정형화 정리.(1991년, 1995년)

S_{FC}의 모든 닫힌 도출 D는 정형 형식으로 환원된다.

폰 플라토와 칸콕스(J. von Plato & A. Kanckos)도 유사한 방식을 사용해서 일반화된 제거 규칙을 사용하는 모든 논리연산자를 지닌 고전 자연연역 체계의 정형화 정리를 증명한 바 있다. 이들의 증명은 직관주의 자연연역 체계에서의 정형화 정리를 고전 자연연역 체계로 확장하는 것이었으며 짧은 증명을 제시했다는데 기여도가 있다.

 

Von Plato & Kanckos (2021),"Normal derivability in classical natural deduction."

1. 증명론의 주요 결과물과 환원 절차의 문제

1.3. 고전적 귀류법에 관한 환원 절차로 올바른 (혹은 더 나은) 것은 무엇인가?

다그 프라비츠
(Dag Prawitz)

프라비츠의 정형화 정리.

S_{WC}를 선언과 존재양화에 관한 규칙을 지니지 않은 약한 고전 1차 논리의 자연연역 체계라고 하자. 그러면 S_{WC} 의 모든 닫힌 도출 D에 대해, D는 정형 형식으로 환원된다.

프라비츠의 일관성 정리.

S_{WC}에는 $\perp$(모순)에 관한 닫힌 정형 도출이 존재하지 않는다.

프라비츠의 제한된 하위식 원리 증명.

S_{WC}를 D를 S_{WC}에서의 임의의 정형 도출이라고 하자. 그리고 φ를 D에서 사용되는 임의의 식이라고 하자. 그러면 만약 φ가 CR-규칙의 해제되는 가정이고 $\neg\psi$ 형식을 지닌다면 ψ는 D의 마지막 식의 하위식이거나 열린 가정의 하위식이다. 그 외의 경우, φ는 D의 마지막 식의 하위식이거나 열린 가정의 하위식이다.

군나 스톨마르크
(Gunnar Stålmarck)

스톨마르크-안도 정형화 정리.(1991년, 1995년)

S_{FC}의 모든 닫힌 도출 D는 정형 형식으로 환원된다.

1. 증명론의 주요 결과물과 환원 절차의 문제

1.3. 고전적 귀류법에 관한 환원 절차로 올바른 (혹은 더 나은) 것은 무엇인가?

다그 프라비츠
(Dag Prawitz)

군나 스톨마르크
(Gunnar Stålmarck)

1. 프라비츠의 증명은 약한 고전논리에 대한 정형화 정리, 하위식 원리 증명, 일관성 증명을 제시한 것이기 때문에 고전논리에 대한 제한적인 결과물로 볼 수 있다.
2. 반면, 스톨마르크-안도의 정형화 정리 증명은 모든 논리연산자에 관한 규칙과 ECQ 및 CR을 포함하는 체계에 대한 증명이라는 측면에서 고전논리에 관해 더 나은 결과물로 볼 수 있다.

물음. 스톨마르크-안도의 CR에 대한 환원절차를 CR에 대한 표준 환원 규칙으로 바라보면 안 되는 것인가?

(1) 스톨마르크-안도의 환원절차 및 증명은 잘 알려져 있지 않거나 이에 대한 논의가 적었다.
예. F.J. Pelletier, “Natural deduction system in logic”, SEP article에서도 이들의 증명과 환원절차에 대해서는 소개를 하지 않고 있고 오히려 von Plato & Kanckos(2021)의 결과만 소개되어 있다.
(2) 프라비츠의 증명에 비해 스톨마르크와 안도는 하위식 원리 증명 및 일관성 증명을 제시하지 않았다.
(3) 프라위츠의 환원절차 도입 목적을 살피더라도, (1) 극대식 제거와 (2) 하위식 속성과 일관성 증명을 위해 환원절차를 도입했었고 이러한 견지에서, **프라위츠의 환원 방식 보다 스톨마르크-안도 방식이 더 적합하다.**

2. 고전 자연연역 체계에서의 하위식 원리 및 일관성 증명

2.1. S_{WC}에서 하위식 원리 및 일관성이 증명된다.

Theorem 4 (Weak Normalization for S_{FC}, Andou [1] and Stålmarck [16]) *For every closed derivation* $\mathfrak{D}$ *in* S_{FC}, *there is a closed normal derivation* $\mathfrak{D}'$ *in* S_{FC} *such that* $\mathfrak{D} \succ \mathfrak{D}'$ *relative to* $\mathbb{R}_{FC}$.

Corollary 8 (Consistency of S_{FC}) *There is no closed normal derivation of* $\perp$ *in* S_{FC}.

증명 과정.

(1) 보조정리 6 (전도원칙). S_{WC}의 모든 정형 도출은 마지막 규칙이 도입 규칙이던가, ECQ이던가 CR임을 보인다.
(2) 보조정리 7. 마지막에 사용된 규칙이 ECQ이거나 CR인 규칙 중, 모순을 도출하는 닫힌 도출은 S_{WC}에 없음을 보인다.
(3) 일관성 보조정리 8. S_{WC}에는 모순을 도출하는 닫힌 정형 도출이 없음을 보인다.

2. 고전 자연연역 체계에서의 하위식 원리 및 일관성 증명

2.1. S_{WC}에서 하위식 원리 및 일관성이 증명된다.

주요 정의.

A *major premise* of the $E-$rule for a connective or quantifier is the premise that contains the connective or quantifier in the $E-$rule, while all other premises are considered minor premises. As a convention, the major premise of an $E-$rule is written on the most left side of the rule. A *maximum formula occurrence* is the conclusion of an $I-$rule or $CR-$rule at the same time the major premise of an $E-$rule. A *segment* in a derivation $\mathfrak{D}$ is a sequence φ_1, ... , φ_n of formula occurrences in $\mathfrak{D}$ where (1) φ_1 is not the conclusion of CR, ECQ, $\vee E$, $\exists E$, (2) φ_i (for $1 \leq i < n$) is either (i) a minor premise of $\vee E$ or $\exists E$, and φ_{i+1} is the conclusion of the same rule, or (ii) the minor premise of $\neg E$ whose major premise is an assumption discharged by CR, and φ_{i+1} is the conclusion of CR, and (3) φ_n is the conclusion of an $I-$rule, $\vee E$, $\exists E$, CR, or ECQ. A *maximum segment* is a segment that begins with a conclusion of an $I-$rule, $\vee E$, $\exists E$, CR, or ECQ and ends with a major premise of an $E-$rule. It is readily shown that every maximum formula occurrence in a given derivation $\mathfrak{D}$ is the last formula in a segment of $\mathfrak{D}$. The segment φ_1, ..., φ_n has a length of n.[4]

2. 고전 자연연역 체계에서의 하위식 원리 및 일관성 증명

2.1. S_{WC}에서 하위식 원리 및 일관성이 증명된다.

주요 정의.

Definition 1 A *path* in a derivation $\mathfrak{D}$ is a sequence of formula occurrences $\varphi_1, ..., \varphi_n$ where:

1. φ_1 is either an open assumption or an assumption discharged by $\to I$, $\neg I$, or CR,
2. $\varphi_i (1 \leq i < n)$ is not the minor premise of an application of $\to E$ or $\neg E$, and either (i) φ_i is not the major premise of $\vee E$ or $\exists E$, and φ_{i+1} is the conclusion of the same rule, or (ii) φ_i is the major premise of $\vee E$ or $\exists E$, and φ_{i+1} is an assumption discharged by that rule,
3. φ_n is either the end-formula of $\mathfrak{D}$ or a minor premise of an $\to E$ or $\neg E$.

Definition 2 An *order* of path π, $op(\pi)$, in a derivation $\mathfrak{D}$ is inductively as follows:

1. $op(\pi) = 0$ if π ends in the end-formula,
2. $op(\pi) = n + 1$ if π ends in the minor premise of $\to E$ or $\neg E$ whose major premise lies on a path π' with $op(\pi') = n$.

2. 고전 자연연역 체계에서의 하위식 원리 및 일관성 증명

2.1. S_{WC}에서 하위식 원리 및 일관성이 증명된다.

Theorem 9 *Let $\mathfrak{D}$ be a closed derivation in S_{FC}, let π be a path in $\mathfrak{D}$, and let $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ be the sequence of segments in π. If $\mathfrak{D}$ is normal, then there is a $\sigma_i (1 \leq i < k)$ such that,*

1. *each $\sigma_j (j < i)$ is the major premise of an E-rule with σ_{j+1} its conclusion, or in the case of $\vee E$ and $\exists E$, an assumption discharged by the rule;*
2. *σ_i is the premise of an I-rule, CR, or ECQ with σ_{i+1} is its conclusion, or is σ_k;*
3. *each $\sigma_j (i < j < k)$, σ_j is the premise of an I-rule with σ_{j+1} its conclusion.*[6]

[6] In this context, condition 1 is identified as an E-part, while the *minimum segment* is represented by σ_i of 2, and 3 is considered an I-part. All formula occurrences in the minimum segment are occurrence of the same formula, the *minimum formula*.

Corollary 12 (Subformula Property of S_{FC}) *Every formula φ in a closed normal derivation $\mathfrak{D}$ is a subformula of the top-formula, of the end-formula, or if φ is of the form $\neg\psi$, then ψ is a subformula of the top-formula or of the end-formula.*

2. 고전 자연연역 체계에서의 하위식 원리 및 일관성 증명

2.1. S_{WC}에서 하위식 원리 및 일관성이 증명된다.

하위식(subformula)은 다음과 같이 귀납적으로 정의된다.

(1) φ는 φ의 하위식이다,
(2) $\neg\psi$가 φ의 하위식이면 ψ와 $\perp$도 φ의 하위식이다,
(3) $\psi \circ \sigma$가 φ의 하위식이면 ψ와 σ도 φ의 하위식이다, 여기서 $\circ$는 $\wedge$, $\vee$ 또는 $\rightarrow$이다,
(4) $\circ\psi$가 φ의 하위식이면 $\psi[x/t]$도 φ의 하위식이다. 여기서 $\circ$는 $\forall$ 또는 $\exists$, (5) 그 이외에 다른 어떤 경우도 φ의 하위식이 아니다.

Corollary 12 (Subformula Property of S_{FC}) *Every formula φ in a closed normal derivation $\mathfrak{D}$ is a subformula of the top-formula, of the end-formula, or if φ is of the form $\neg\psi$, then ψ is a subformula of the top-formula or of the end-formula.*

3. 스톨마르크-안도의 환원 절차를 표준 방식으로 채택해야 하는 이유

1. 프라비츠의 CR에 관한 환원 절차는 극대식을 완전히 제거할 수 없다.

다그 프라비츠
(Dag Prawitz)

프라비츠(1971, p. 259)는 정형화 정리 및 환원절차의 주요한 역할이 극대식의 제거라고 여겼다.

전도 원칙은 도입 규칙 다음에 오는 각 제거규칙의 사용이 정당화됨을 설명해 준다. 왜냐하면 환원을 통해 이러한 우회 없이도 결론을 바로 얻을 수 있기 때문이다. 물론 이러한 환원을 통해 새로운 극대식이 발생할 수 있다. 정형화 정리는 모든 극대식이 도출에서 제거될 수 있음을 보임으로써 논리체계 전체에 관한 정당화를 강화하는 것이다. (Prawitz [11, p. 259]).

The inversion principle states that each particular elimination following an introduction is justified since by a reduction, the conclusion can also be obtained directly without this detour; but of course, new maximum formulas may arise by this reduction. The normalization theorem strengthens this by showing that all maximum formulas can be removed from a derivation and thus justifies the logical system as a whole. (Prawitz [11, p. 259]. Italics in original.)

3. 스톨마르크-안도의 환원 절차를 표준 방식으로 채택해야 하는 이유

1. 프라비츠의 CR에 관한 환원 절차는 극대식을 완전히 제거할 수 없다.

다그 프라비츠
(Dag Prawitz)

우리가 S_{WC}에서 CR-규칙의 결론을 원자 문장으로 제약하면, S_{WC}에서의 모든 도출이 극대식이 없는 것으로 전환될 수 있음을 우리는 쉽게 보일 수 있다.

We can restrict applications of the [CR]-rule in [S_{WC}] to the case where the consequence is atomic, and we then easily prove that every [derivation] in [S_{WC}] can be transformed into a corresponding [derivation] containing no maximum formula.

Natural Deduction: a Proof-Theoretic Study, p. 39

프라비츠의 CR에 관한 환원 절차가 극대식을 없애는 방식은 CR-규칙의 결론을 원자식으로 만드는 것이다.

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg(\varphi \to \psi)]^1 \\ \mathfrak{D} \\ \bot\end{array}}{\varphi \to \psi}\,CR_{,1} \quad \rhd_{CR(\to)} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{[\neg\psi]^3 \quad \dfrac{[\varphi \to \psi]^1 \quad [\varphi]^2}{\psi}\to E}{\bot}\to E}{\neg(\varphi \to \psi)}\to I_{,1} \\ \mathfrak{D} \\ \bot\end{array}}{\psi}\,CR_{,3}}{\varphi \to \psi}\to I_{,2}$$

3. 스톨마르크-안도의 환원 절차를 표준 방식으로 채택해야 하는 이유

1. 프라비츠의 CR에 관한 환원 절차는 극대식을 완전히 제거할 수 없다.

니일 테넌트
(Neil Tennant)

다그 프라비츠
(Dag Prawitz)

특수한 경우, 프라비츠의 CR에 관한 환원 절차는 극대식을 완전히 제거할 수 없다.

예. 테넌트의 거짓말쟁이 문장에 관한 규칙

Let us consider the rules for the liar sentence Φ proposed by Tennant [17, 18], alongside rules for a truth-predicate $T(x)$ stating that x is true.[8]

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathfrak{D}\\ \varphi\end{matrix}}{T(\ulcorner\varphi\urcorner)}\,TI \qquad \dfrac{T(\ulcorner\varphi\urcorner)}{\varphi}\,TE \qquad \dfrac{\begin{matrix}[T(\ulcorner\Phi\urcorner)]^1\\ \mathfrak{D}_1\\ \bot\end{matrix}}{\Pi}\,\Phi I_{,1} \qquad \dfrac{\Phi \qquad \begin{matrix}[\neg T(\ulcorner\Phi\urcorner)]^1\\ \mathfrak{D}_2\\ \varphi\end{matrix}}{\varphi}\,\Phi E_{,1}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\neg\Phi]^1\\ \mathfrak{D}_1\\ \bot\end{matrix}}{\Phi}\,CR_{,1} \qquad \begin{matrix}[\neg T(\ulcorner\varphi\urcorner)]^2\\ \mathfrak{D}_2\\ \varphi\end{matrix}}{\varphi}\,\Phi E_{,2}$$

이 경우, CR-규칙의 결론이 이미 원자 문장이기 때문에 더 이상 환원이 필요하지 않는다. 하지만 거짓말쟁이 문장 Φ는 제거규칙의 주전제이기 때문에 극대식이기도 하다. 그러므로 프라비츠의 CR-규칙에 대한 환원 절차는 극대식을 제거하지 못한다.

3. 스톨마르크-안도의 환원 절차를 표준 방식으로 채택해야 하는 이유

1. 프라비츠의 CR에 관한 환원 절차는 극대식을 완전히 제거할 수 없다.

니일 테넌트
(Neil Tennant)

군나 스톨마르크
(Gunnar Stålmarck)

특수한 경우, 프라비츠의 CR에 관한 환원 절차는 극대식을 완전히 제거할 수 없다.

예. 테넌트의 거짓말쟁이 문장에 관한 규칙

Let us consider the rules for the liar sentence Φ proposed by Tennant [17, 18], alongside rules for a truth-predicate $T(x)$ stating that x is true.[8]

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}\\ \varphi\end{array}}{T(\ulcorner\varphi\urcorner)}\,TI
\qquad
\dfrac{T(\ulcorner\varphi\urcorner)}{\varphi}\,TE
\qquad
\dfrac{\begin{array}{c}[T(\ulcorner\Phi\urcorner)]^1\\ \mathfrak{D}_1\\ \bot\end{array}}{\Pi}\,\Phi I_{,1}
\qquad
\dfrac{\Phi \quad \begin{array}{c}[\neg T(\ulcorner\Phi\urcorner)]^1\\ \mathfrak{D}_2\\ \varphi\end{array}}{\varphi}\,\Phi E_{,1}
$$

하지만 스톨마르크-안도의 환원절차는 극대식인 거짓말쟁이 문장을 제거할 수 있다.

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\Phi]^1\\ \mathfrak{D}_1\\ \bot\end{array}}{\Phi}\,CR_{,1} \quad \begin{array}{c}[\neg T(\ulcorner\varphi\urcorner)]^2\\ \mathfrak{D}_2\\ \varphi\end{array}}{\varphi}\,\Phi E_{,2}
\quad \rhd_{CRSA} \quad
\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^3 \quad \dfrac{[\Phi]^4 \quad \begin{array}{c}[\neg T(\ulcorner\Phi\urcorner)]^2\\ \mathfrak{D}_2\\ \varphi\end{array}}{\varphi}\,\Phi E_{,2}}{\bot}\,\neg E}{\neg\Phi}\,\neg I_{,4}\\ \mathfrak{D}_1\\ \bot\end{array}}{\varphi}\,CR_{,3}
$$

3. 스톨마르크-안도의 환원 절차를 표준 방식으로 채택해야 하는 이유

1. 프라비츠의 CR에 관한 환원 절차는 극대식을 완전히 제거할 수 없다.

다그 프라비츠
(Dag Prawitz)

군나 스톨마르크
(Gunnar Stålmarck)

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg(\varphi\lor\psi)]^1\\ \mathfrak{D}\\ \bot\end{array}}{\varphi\lor\psi}CR_{,1} \quad \rhd_{CRP(\lor)} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{[\varphi\lor\psi]^5 \quad \dfrac{[\neg\varphi]^1 \quad [\varphi]^2}{\bot}\neg E \quad \dfrac{[\neg\psi]^4 \quad [\psi]^3}{\bot}\neg E}{\bot}\lor E_{,2,3}}{\neg(\varphi\lor\psi)}\neg I_{,5}\\ \mathfrak{D}\\ \bot\end{array}}{\varphi}CR_{,1}}{\varphi\lor\psi}\lor I$$

특수한 경우가 아니더라도 프라비츠의 CR에 관한 환원 절차는 선언문과 존재양화 문장이 극대식일 경우 이를 완전히 제거할 수 없다.

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\exists x\varphi x]^1\\ \mathfrak{D}\\ \bot\end{array}}{\exists x\varphi x}CR_{,1} \quad \rhd_{CRP(\exists)} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{[\exists x\varphi x]^4 \quad \dfrac{[\neg\varphi y]^1 \quad [\varphi y]^2}{\bot}\neg E}{\bot}\exists E_{,2}}{\exists x\varphi x}\neg I_{,4}\\ \mathfrak{D}\\ \bot\end{array}}{\varphi y}CR_{,1}}{\exists x\varphi x}\exists I$$

3. 스톨마르크-안도의 환원 절차를 표준 방식으로 채택해야 하는 이유

2. 스톨마르크-안도의 환원 절차는 더욱 풍부한 정리를 제공한다.

다그 프라비츠
(Dag Prawitz)

프라비츠(1965, 1971)는 정형화 정리 및 하위식 원리를 증명하기 위해 새로운 환원 절차를 도입했다. 예. 순열 전환(permutation conversion)

정의. 하위식(subformula)은 다음과 같이 귀납적으로 정의된다.

(1) φ는 φ의 하위식이다,
(2) $\neg\psi$가 φ의 하위식이면 ψ와 $\bot$도 φ의 하위식이다,
(3) $\psi \circ \sigma$가 φ의 하위식이면 ψ와 σ도 φ의 하위식이다, 여기서 $\circ$는 $\wedge$, $\vee$ 또는 $\rightarrow$이다,
(4) $\circ\psi$가 φ의 하위식이면 $\psi[x/t]$도 φ의 하위식이다. 여기서 $\circ$는 $\forall$ 또는 $\exists$, (5) 그 이외에 다른 어떤 경우도 φ의 하위식이 아니다.

3. 스톨마르크-안도의 환원 절차를 표준 방식으로 채택해야 하는 이유

2. 스톨마르크-안도의 환원 절차는 더욱 풍부한 정리를 제공한다.

다그 프라비츠
(Dag Prawitz)

프라비츠(1965, 1971)는 정형화 정리 및 하위식 원리를 증명하기 위해 새로운 환원 절차를 도입했다. 예. 순열 전환(permutation conversion)

$$\cfrac{\cfrac{\varphi \lor \varphi \quad \cfrac{[\varphi]^1 \quad [\varphi]^1}{\varphi \land \varphi}\,\land I \quad \cfrac{[\varphi]^2 \quad [\varphi]^2}{\varphi \land \varphi}\,\land I}{\varphi \land \varphi}\,\lor E_{,1,2}}{\varphi}\,\land E$$

왼쪽은 정형 도출이지만 하위식 원리를 만족하지 않는다. $\varphi \land \varphi$는 어떠한 해제되지 않은 가정이나 결론의 하위식이 아니다.

순열전환을 적용하면 아래와 같은 정형 도출로 환원된다.

$$\cfrac{\varphi \lor \varphi \quad \cfrac{\cfrac{[\varphi]^1 \quad [\varphi]^1}{\varphi \land \varphi}\,\land I}{\varphi}\,\land E \quad \cfrac{\cfrac{[\varphi]^2 \quad [\varphi]^2}{\varphi \land \varphi}\,\land I}{\varphi}\,\land E}{\varphi}\,\lor E_{,1,2}$$

$$\cfrac{\varphi \lor \varphi \quad [\varphi]^1 \quad [\varphi]^2}{\varphi}\,\lor E_{,1,2}$$

3. 스톨마르크-안도의 환원 절차를 표준 방식으로 채택해야 하는 이유

2. 스톨마르크-안도의 환원 절차는 더욱 풍부한 정리를 제공한다.

다그 프라비츠
(Dag Prawitz)

프라비츠(1965, 1971)는 정형화 정리 및 하위식 원리를 증명하기 위해 새로운 환원 절차를 도입했다. 예. 순열 전환(permutation conversion)

프라비츠가 순열전환 환원 절차 등을 하위식 원리 증명 및 일관성 증명을 위해 도입했듯이 새로운 결과물을 위해 (전도원칙을 만족하는 하에서) 새로운 환원 절차를 도입할 수 있다.

스톨마르크-안도의 환원 절차는 프라비츠도 고려했던 환원 절차의 주요한 역할인 (1) 극대식의 제거와 (2) 정리-증명(theorem-proving)의 역할을 충족한다. 반면 프라비츠의 CR에 관한 환원 절차는 이를 충족하지 못 한다. 그러므로 CR에 관한 환원 절차로 스톨마르크-안도의 환원 절차가 더 적합하다.





감사합니다.